Calcul numeric

Subspații. Matrice. Sisteme liniare pătratice.

Paul Irofti
Cristian Rusu
Andrei Pătraşcu

Departmentul de Informatică
Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

Cuprins - Curs 1

- **Introducere. Vectori. Operaţii elementare**
- Subspaţii liniare. Produs scalar. Norme
- Matrice. Operaţii elementare. Proprietăţi
- Sisteme de ecuaţii liniare pătratice
- Algoritmi de rezolvare a SL pătratice
- Sisteme speciale

Vom lucra cu entităţi (vectori şi matrice) construite cu numere reale

- scalar: 1.2
- vector: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Definiţie. Un vector real x de dimensiune n este o colecţie de n numere reale dispuse ordonat într-o coloană.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

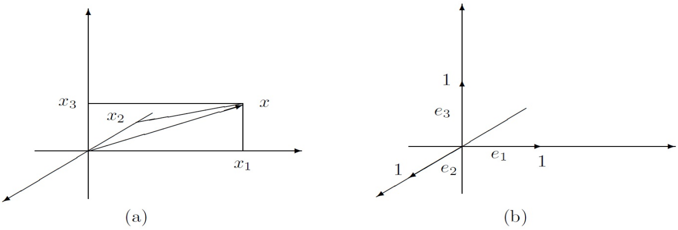


Fig. 1.1: (a) Un vector în $\mathbb{R}^3$ şi coordonatele sale; (b) vectorii unitate în $\mathbb{R}^3$

Vectori: Operatii

- Suma: $z = x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$

- Înmulţire cu un scalar: $z = \alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$

(a) (b)

Fig. 1.2: (a) Suma a doi vectori în $\mathbb{R}^2$; (b) Produsul cu un scalar

Considerând vectorii $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$, atunci vectorul

$$z = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$$

se numeste combinaţie liniară a vectorilor din X cu coeficienţii $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}$.

Exemplu: $X = \{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \alpha = [1\ 1/2]$

$$z = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considerând vectorii $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$, atunci vectorul

$$z = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$$

se numeste combinaţie liniară a vectorilor din X cu coeficienţii $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}$.

Exemplu: $X = \{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \alpha = [1\ 1/2]$

$$z = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observati: dacă $\alpha = [1\ \ -1/2]$ atunci $z = 0$

Vectorii $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ se numesc **liniar dependenţi** dacă $\exists \hat{\alpha} \neq 0 \in \mathbb{R}^p$ a.i.

$$z = \hat{\alpha}_1 x_1 + \cdots \hat{\alpha}_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i x_i = 0$$

Altfel, se numesc **liniar independenţi**.

Exemplu liniar dependenţi: $X = \{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \hat{\alpha} = [1 \; -1/2]$

$$z = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplu liniar independenţi: $X = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \alpha = [\alpha_1 \; \alpha_2]^T$

$$z = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Arătaţi că $\alpha(z)$ este unic pentru X liniar independenţi! (exerciţiu)

Cuprins

O mulţime S de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **subspaţiu liniar** al spaţiului $\mathbb{R}^n$ dacă:

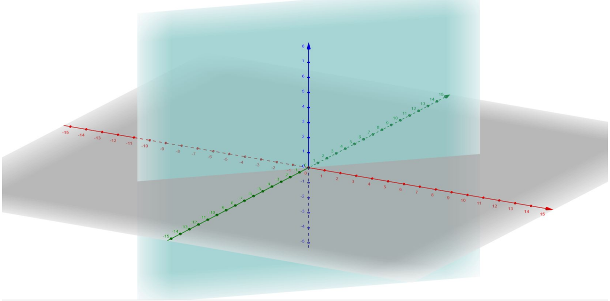
- $x + y \in S, \forall x, y \in S$
- $\alpha x \in S, \forall x \in S, \alpha \in \mathbb{R}$

Subspaţiu Liniar

O mulţime S de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **subspaţiu liniar** al spaţiului $\mathbb{R}^n$ dacă: (i) $x + y \in S, \forall x, y \in S$; (ii) $\alpha x \in S, \forall x \in S, \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple:

- in $\mathbb{R}$: axa reală $S = \{x \in \mathbb{R}\}$

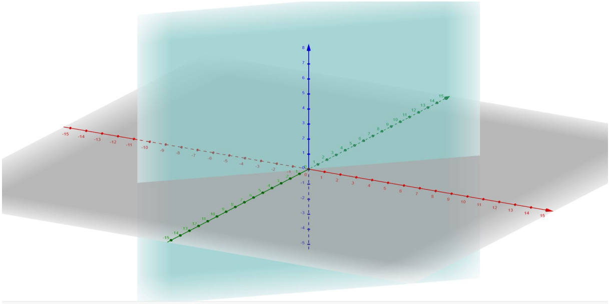


Geogebra.org

O mulţime S de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **subspaţiu liniar** al spaţiului $\mathbb{R}^n$ dacă: (i) $x + y \in S, \forall x, y \in S$; (ii) $\alpha x \in S, \forall x \in S, \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple:

- in $\mathbb{R}$: axa reală $S = \{x \in \mathbb{R}\}$
- in $\mathbb{R}^2$: dreapta $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$



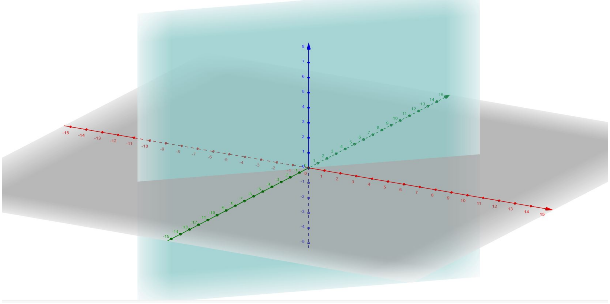
Geogebra.org

Subspaţiu Liniar

O mulţime S de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **subspaţiu liniar** al spaţiului $\mathbb{R}^n$ dacă: (i) $x + y \in S, \forall x, y \in S$; (ii) $\alpha x \in S, \forall x \in S, \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple:

- in $\mathbb{R}$: axa reală $S = \{x \in \mathbb{R}\}$
- in $\mathbb{R}^2$: dreapta $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$
- in $\mathbb{R}^3$: plan $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$



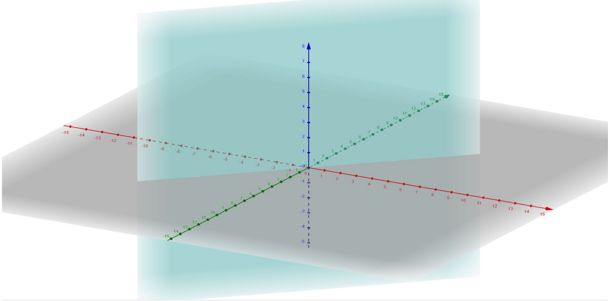
Geogebra.org

Subspaţiu Liniar

O mulţime S de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **subspaţiu liniar** al spaţiului $\mathbb{R}^n$ dacă: (i) $x + y \in S, \forall x, y \in S$; (ii) $\alpha x \in S, \forall x \in S, \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple:

- in $\mathbb{R}$: axa reală $S = \{x \in \mathbb{R}\}$
- in $\mathbb{R}^2$: dreapta $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$
- in $\mathbb{R}^3$: plan $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$
- in $\mathbb{R}^n$: subspaţiu $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$, unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$



Geogebra.org

O mulţime S de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **subspaţiu liniar** al spaţiului $\mathbb{R}^n$ dacă:

- $x + y \in S, \forall x, y \in S$
- $\alpha x \in S, \forall x \in S, \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple:

- in $\mathbb{R}$: axa reală $S = \{x \in \mathbb{R}\}$
- in $\mathbb{R}^2$: dreapta $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$
- in $\mathbb{R}^3$: plan $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$
- in $\mathbb{R}^n$: subspaţiu $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$, unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Combinatiile liniare ale vectorilor $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ genereaza un subspaţiu liniar!

O mulţime B de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **bază** al spaţiului $S \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă:

- elementele din B sunt liniar independente
- B genereaza S

Exemple:

- $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ sau $S = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

O mulţime B de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **bază** al spaţiului $S \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă:

- elementele din B sunt liniar independente
- B genereaza S

Exemple:

- $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ sau $S = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 b_1 + \cdots \alpha_p b_p, \alpha \in \mathbb{R}^p\}$ sau $S = span\{b_1, \cdots, b_p\}$

O mulţime B de vectori din $\mathbb{R}^n$ este numită **bază** al spaţiului $S \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă:

- elementele din B sunt liniar independente
- B genereaza S

Exemple:

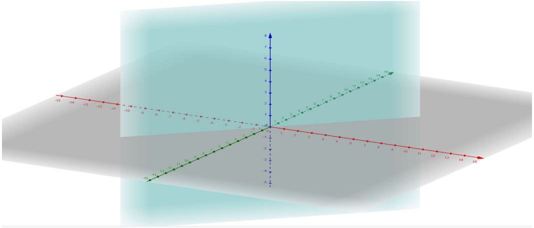
- $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ sau $S = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 b_1 + \cdots \alpha_p b_p, \alpha \in \mathbb{R}^p\}$ sau
  $S = span\{b_1, \cdots, b_p\}$
- $\{e_1, \cdots, e_n\}$ baza (canonica) pentru spaţiul $\mathbb{R}^n$

Subspaţiu Liniar

Dimensiunea subspaţiului $S \subseteq \mathbb{R}^n$ = numărul de vectori din baza (nr. maxim de vectori liniar independenţi)

Exemple:

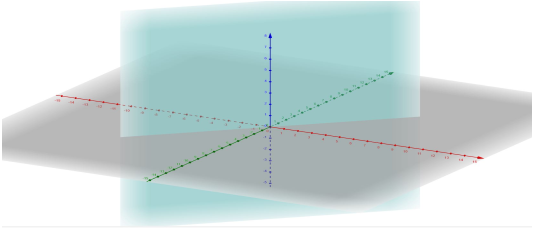
- $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} => \text{Dimensiune } Dim(S) = 1$



Dimensiunea subspaţiului $S \subseteq \mathbb{R}^n$ = numărul de vectori din baza (nr. maxim de vectori liniar independenţi)

Exemple:

- $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =>$ Dimensiune $Dim(S) = 1$
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 b_1 + \cdots \alpha_p b_p, \alpha \in \mathbb{R}^p\} => Dim(S) = p$



În orice (sub)spaţiu este necesară o metrică de măsură a distanţelor

Multe probleme de calcul numeric şi învăţare automată se formulează în termeni de **distanţe**

Support Vector Machine:

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} \ \|w\|_2^2$$
$$\text{s.t. } y_i(w^T x_i + b) \geq 1 - \xi_i, \xi \geq 0$$

Regresie liniară:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \|x\|_2^2$$
$$\text{s.t. } \ Ax = b$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \|Ax - b\|_2^2$$

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y

Norme $\| \cdot \|$: functii care satisfac urmatoarele conditii

- pozitivitate: $\|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

Produs scalar euclidian: $\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y
- in felul acesta, capata sensul unei măsuri de similaritate (în opoziţie cu distanţa)

Norme $\|\cdot\|$: functii care satisfac urmatoarele conditii

- pozitivitate: $\|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- omogenitate: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y
- in felul acesta, capata sensul unei măsuri de similaritate (în opoziţie cu distanţa)

Norme $\|\cdot\|$: functii care satisfac urmatoarele conditii

- pozitivitate: $\|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- omogenitate: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
- inegalitatea triunghiului: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y

Norme $\|\cdot\|$: functii care satisfac urmatoarele conditii

- pozitivitate: $\|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- omogenitate: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
- inegalitatea triunghiului: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\textit{Exemple}: \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}, \;\; \|x\|_p := \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y
- in felul acesta, capata sensul unei masuri de similaritate (in opozitie cu distanta)

Norme $\|\cdot\|$: functii care satisfac urmatoarele conditii

- pozitivitate: $\|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- omogenitate: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
- inegalitatea triunghiului: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

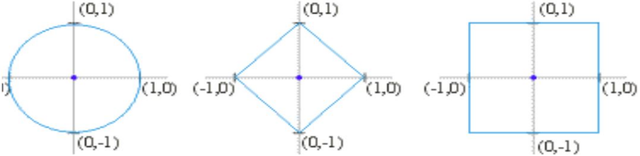
$$\textit{Exemple}: \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}, \quad \|x\|_p := \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y

Norme $\|\cdot\|$: exemple

- norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ (fig. stanga)



w3.cs.jmu.edu

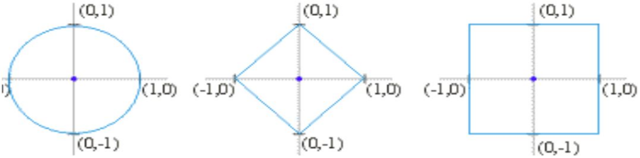
Norme. Produs Scalar

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y
- in felul acesta, capata sensul unei masuri de similaritate (in opozitie cu distanta)

Norme $\|\cdot\|$: exemple

- norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ (fig. stanga)
- norma 1: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ (fig. centru)



w3.cs.jmu.edu

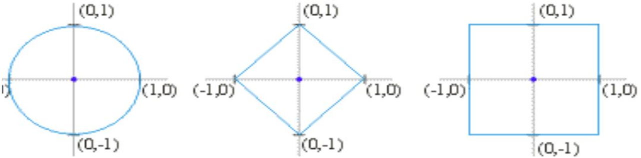
Norme. Produs Scalar

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y
- in felul acesta, capata sensul unei masuri de similaritate (in opozitie cu distanta)

Norme $\|\cdot\|$: exemple

- norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ (fig. stanga)
- norma 1: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ (fig. centru)
- norma ∞: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ (fig. dreapta)



w3.cs.jmu.edu

Cuprins

- Introducere. Vectori. Operaţii elementare
- Subspaţii liniare. Produs scalar. Norme
- **Matrice. Operaţii elementare. Proprietăţi**
- Sisteme de ecuaţii liniare pătratice
- Algoritmi de rezolvare a SL pătratice
- Sisteme speciale

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- dacă $m = n$ atunci A este matrice patrata

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- dacă $m = n$ atunci A este matrice patrata
- A patrata $\Rightarrow$ diagonala principala este mulţimea pozitiilor pentru care $i = j$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- dacă $m = n$ atunci A este matrice patrata
- A patrata $\Rightarrow$ diagonala principala este mulţimea pozitiilor pentru care $i = j$
- $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- dacă $m = n$ atunci A este matrice patrata
- A patrata $\Rightarrow$ diagonala principala este mulţimea pozitiilor pentru care $i = j$
- $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- $C = \alpha A \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij}$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- dacă $m = n$ atunci A este matrice patrata
- A patrata $\Rightarrow$ diagonala principala este mulţimea pozitiilor pentru care $i = j$
- $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- $C = \alpha A \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij}$
- Transpusa $B := A^T \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ generează subspaţiile:

- Imaginea matricii A:
  $Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ astfel incat } y = Ax\}$
  - rang(A) = dim(Im(A))

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ generează subspaţiile:

- Imaginea matricii A:
  $Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \ \exists x \in \mathbb{R}^n$ astfel incat $y = Ax\}$
    - rang(A) = dim(Im(A))
- Nucleul matricii A: $Ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ genereaza subspatiile:

- Imaginea matricii A:
  $Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \ \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ astfel incat } y = Ax\}$
  - rang(A) = dim(Im(A))
- Nucleul matricii A: $Ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$

Teorema. $Im(A) \perp Ker(A^T)$ si orice $x \in \mathbb{R}^m$ se decompune

$$x = u + v, u \in Im(A), v \in Ker(A^T)$$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

- dacă $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si $x \in \mathbb{R}^n$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

- dacă $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si $x \in \mathbb{R}^n$
- Produs M-V: $y = Ax := \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ reprezinta un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$y = Ax := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Algorithm $GAXPY(A, x, y)$
1. **Pentru** $i = 1 : m$
    1. **Pentru** $j = 1 : n$
        1. $y_i = y_i + a_{ij}x_j$

Produs matrice-matrice. Forme

$$C := AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

$$Observam : c_{ij} = a^i b_j$$

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Produs matrice-matrice: Forma 1

$$C := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

$$= [a_1 \cdots a_l] \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^l \end{bmatrix}$$

$$\text{Forma 1} : C = AB = \sum_{k=1}^{l} a_k b^k$$

Produs matrice-matrice: Forma 2

$$C := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

$$\text{Forma 2} : C = AB = \begin{bmatrix} \underbrace{Ab_1}_{c_1} & \underbrace{Ab_2}_{c_2} & \cdots & \underbrace{Ab_n}_{c_n} \end{bmatrix}$$

Produs matrice-matrice: Forma 3

$$C := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

$$\text{Forma 3} : C = AB = \begin{bmatrix} a^1 B \\ a^2 B \\ \cdots \\ a^m B \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \cdots \\ c^m \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

Algorithm $MM(A, B)$

1. **Pentru** $i = 1 : m$
   1. **Pentru** $j = 1 : n$
      1. **Pentru** $k = 1 : l$
         1. $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik} b_{kj}$

- Triunghiulare
- Hessenberg
- Diagonale - Bidiagonale - Tridiagonale
- U superior triunghiulara $u_{ij} = 0$ pentru $j < i$:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- L inferior triunghiulara $l_{ij} = 0$ pentru $j > i$:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

- H superior Hessenberg $h_{ij} = 0$ pentru $j < i - 1$:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n-1} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n-1} & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & \cdots & h_{3n-1} & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & h_{nn-1} & h_{nn} \end{bmatrix}$$

- H inferior Hessenberg $h_{ij} = 0$ pentru $i < j - 1$:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ h_{n-11} & h_{n-12} & h_{n-13} & \cdots & h_{n-1n} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

- D matrice diagonală $d_{ij} = 0$ pentru $j \neq i$
- B matrice bidiagonală :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn-1} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

- T tridiagonală:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{n-1n-1} & t_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn-1} & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Cuprins

Un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute are forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

Forma matriceala

$$Ax = b,$$

unde A este matricea coeficienţilor, x vector necunoscutelor, b termen liber

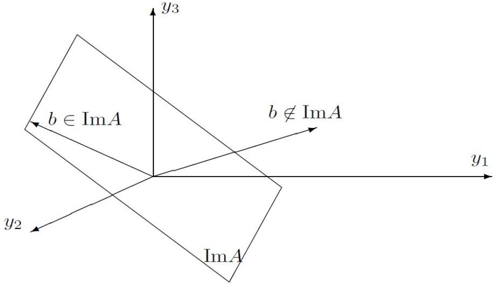
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemul

$$Ax = b$$

- Subdeterminat: $m < n$, posibil o infinitate de soluţii
- Determinat: $m = n$, adesea soluţie unică
- Supradeterminat: $m > n$, adesea nu are soluţie

Teoremă. Sistemul $Ax = b$ are soluţie dacă şi numai dacă $b \in Im(A)$.



Exemplu: Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, atunci $Ax = b$ este

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

- O soluţie particulară: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Mulţimea tuturor soluţiilor: $X = \left\{ x = \begin{bmatrix} 1 + \alpha \\ 1 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Teoremă. Dacă $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ atunci sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă:

$$x = A^{-1}b.$$

- Nu este o formulă adecvată calculului numeric (vrem sa evităm A^{-1})

Teoremă. Dacă $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ atunci sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă:

$$x = A^{-1}b.$$

- Nu este o formulă adecvată calculului numeric (vrem sa evităm A^{-1})
- In general, existenţa unei soluţii se determină greu

Teoremă. Dacă $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ atunci sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă:

$$x = A^{-1}b.$$

- Nu este o formulă adecvată calculului numeric (vrem sa evităm A^{-1})
- In general, existenţa unei soluţii se determină greu
- In particular, existenţa unei soluţii se detectează imediat in cazul matricilor triunghiulare

Exista instanţe foarte simple de SL pătratice: sistem triunghiulare! Distingem:

- $A = U$ superior triunghiulara $u_{ij} = 0$ pentru $j < i$:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- $A = L$ inferior triunghiulara $l_{ij} = 0$ pentru $j > i$:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Exista instanţe foarte simple de SL pătratice: sistem triunghiulare!
Distingem: $A = L$ inferior triunghiulara $l_{ij} = 0$ pentru $j > i$:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Observăm că: $x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

Exista instanţe foarte simple de SL pătratice: sistem triunghiulare!
Distingem: $A = L$ inferior triunghiulara $l_{ij} = 0$ pentru $j > i$:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Observăm că: $x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$
- Dacă se cunosc $x_1, \cdots, x_{i-1}$ atunci :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}$$

Algorithm *LTRIS*(L, b)

1. $x := b$
2. **Pentru** $i = 1 : n$
   1. **Pentru** $j = 1 : i - 1$
      1. $x_i = x_i - l_{ij} x_j$
   2. $x_i = x_i / l_{ii}$

- La fiecare pas al buclei necesită $2(i - 1)$ flopi

Algorithm *LTRIS*(L, b)

1. $x := b$
2. **Pentru** $i = 1 : n$
   1. **Pentru** $j = 1 : i - 1$
      1. $x_i = x_i - l_{ij}x_j$
   2. $x_i = x_i / l_{ii}$

- La fiecare pas al buclei necesită $2(i-1)$ flopi
- Complexitate: $O(n^2)$ (comparativ cazul general $O(n^3)$)

Algorithm $LTRIS(L, b)$

1. $x := b$
2. **Pentru** $i = 1 : n$
   1. **Pentru** $j = 1 : i - 1$
      1. $x_i = x_i - l_{ij}x_j$
   2. $x_i = x_i / l_{ii}$

- La fiecare pas al buclei necesită $2(i - 1)$ flopi
- Complexitate: $O(n^2)$ (comparativ cazul general $O(n^3)$)
- Exercitiu: Scrieti pseudocodul alg. UTRIS

Algorithm *LTRIS*(L, b)

1. $x := b$
2. **Pentru** $i = 1 : n$
   1. **Pentru** $j = 1 : i - 1$
      1. $x_i = x_i - l_{ij} x_j$
   2. $x_i = x_i / l_{ii}$

- La fiecare pas al buclei necesită $2(i - 1)$ flopi
- Complexitate: $O(n^2)$ (comparativ cazul general $O(n^3)$)
- Exercitiu: Scrieti pseudocodul alg. UTRIS
- Idee: Putem reduce un sistem general la unul triunghiular?

Cuprins

Definiţie. Transformare inferior triunghiulară elementară (ITE) de ordin n şi indice k are forma:

$$M_k = I_n - m_k e_k^T$$

unde

$$m_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{k+1,k} & \cdots & \mu_{n,k} \end{bmatrix}$$

are primele k elemente nenule.

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\mu_{k+1,k} & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\mu_{nk} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi ale matricilor de transformare ITE:

- M_k este inversabilă şi $M_k^{-1} = I_n + m_k e_k^T$

Proprietăţi ale matricilor de transformare ITE:

- M_k este inversabilă şi $M_k^{-1} = I_n + m_k e_k^T$
- $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1 : k \\ x_i - \mu_{ik} x_k & \text{pentru } i = k+1 : n \end{cases}$

Proprietăţi ale matricilor de transformare ITE:

- M_k este inversabilă şi $M_k^{-1} = I_n + m_k e_k^T$
- $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1:k \\ x_i - \mu_{ik} x_k & \text{pentru } i = k+1:n \end{cases}$
- Pe scurt, M_k schimba elementele din x de la indicele k mai departe

Proprietăţi ale matricilor de transformare ITE:

- M_k este inversabilă şi $M_k^{-1} = I_n + m_k e_k^T$
- $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1 : k \\ x_i - \mu_{ik} x_k & \text{pentru } i = k+1 : n \end{cases}$
- Pe scurt, M_k schimba elementele din x de la indicele k mai departe
- Dacă alegem valori potrivite pentru multiplicatorii μ_{ik}, putem obţine $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1 : k \\ 0 & \text{pentru } i = k+1 : n \end{cases}$

Proprietăţi ale matricilor de transformare ITE:

- M_k este inversabilă şi $M_k^{-1} = I_n + m_k e_k^T$
- $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1:k \\ x_i - \mu_{ik} x_k & \text{pentru } i = k+1:n \end{cases}$
- Pe scurt, M_k schimba elementele din x de la indicele k mai departe
- Dacă alegem valori potrivite pentru multiplicatorii μ_{ik}, putem obţine $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1:k \\ 0 & \text{pentru } i = k+1:n \end{cases}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad M_2 x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ alegând } \mu_{i1} = \frac{x_i}{x_2}$$

Proprietăţi ale matricilor de transformare ITE:

- M_k este inversabilă şi $M_k^{-1} = I_n + m_k e_k^T$
- $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1 : k \\ x_i - \mu_{ik} x_k & \text{pentru } i = k+1 : n \end{cases}$
- Pe scurt, M_k schimba elementele din x de la indicele k mai departe
- Dacă alegem valori potrivite pentru multiplicatorii μ_{ik}, putem obţine $(M_k x)_i := \begin{cases} x_i & \text{pentru } i = 1 : k \\ 0 & \text{pentru } i = k+1 : n \end{cases}$
- Daca $x_k = 0$, atunci $M_k x = x$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad M_2 x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ alegând } \mu_{i1} = \frac{x_i}{x_2}$$

Algoritmul de EG propune triangularizarea progresiva a matricii A
Initializare: $A_1 = A, b_{(1)} = b$
Pas 1: $A_2 = M_1 A$ are elementele sub-diagonale de pe coloana 1 egale cu 0

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Pas 2: $A_3 = M_2 M_1 A$ are elementele sub-diagonale de pe coloanele 1 si 2 egale cu 0

....

Pas k: $A_k = M_k \cdots M_2 M_1 A$ are elementele sub-diagonale de pe coloanele $1:k$ egale cu 0; nu sunt afectate primele $k-1$ coloane

Algoritm $EG(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n - 1$

    1. **Se calculează matricea** M_k (adică multiplicatorii $\mu_{ik}, i = k + 1 : n$), astfel încât $(M_k A)_i = 0$, pentru $i = k + 1 : n$

    2. $A = M_k A$

- Multiplicatorii necesari $\mu_{ik} = \frac{a^k_{ik}}{a^k_{kk}}$

Algoritm $EG(A)$
1. **Pentru** $k = 1 : n-1$
   1. **Se calculează matricea** M_k (adică multiplicatorii $\mu_{ik}, i = k+1 : n$), astfel încât $(M_k A)_i = 0$, pentru $i = k+1 : n$
   2. $A = M_k A$

- Multiplicatorii necesari $\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$
- Algoritmul produce $U = A_n = \underbrace{M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1}_{M} A$

Algoritm $EG(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n-1$

    1. **Se calculează matricea** M_k (adică multiplicatorii $\mu_{ik}, i = k+1 : n$), astfel încât $(M_k A)_i = 0$, pentru $i = k+1 : n$
    2. $A = M_k A$

- Multiplicatorii necesari $\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$
- Algoritmul produce $U = A_n = \underbrace{M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1}_{M} A$
- Matricea M este inferior triunghiulară (de ce?)

Algoritm $EG(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n - 1$

   1. **Se calculează matricea** M_k (adică multiplicatorii $\mu_{ik}, i = k + 1 : n$), astfel încât $(M_k A)_i = 0$, pentru $i = k + 1 : n$
   2. $A = M_k A$

- Multiplicatorii necesari $\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$
- Algoritmul produce $U = A_n = \underbrace{M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1}_{M} A$
- Matricea M este inferior triunghiulară (de ce?)
- Important: Daca toate matricile lider principale $A^{[k]}$ din A sunt nesingulare, atunci algoritmul produce un U nesingular (sistemul are soluţie unică!)

Algoritm $EG(A)$
1. **Pentru** $k = 1 : n-1$
   1. **Se calculează matricea** M_k (adică multiplicatorii $\mu_{ik}, i = k+1 : n$), astfel încât $(M_k A)_i = 0$, pentru $i = k+1 : n$
   2. $A = M_k A$

- Multiplicatorii necesari $\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$
- Algoritmul produce $U = A_n = \underbrace{M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1}_{M} A$
- Matricea M este inferior triunghiulară (de ce?)
- Important: Daca toate matricile lider principale $A^{[k]}$ din A sunt nesingulare, atunci algoritmul produce un U nesingular (sistemul are soluţie unică!)
- Altfel EG produce un U singular (care sunt consecinţele?)

Pseudocodul algoritmului EG:

Algoritm $G(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n-1$
    1. **Pentru** $i = k+1 : n$
        1. $a_{ik} \leftarrow \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    2. **Pentru** $j = k+1 : n$
        1. **Pentru** $i = k+1 : n$
            1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \mu_{ik} a_{kj}$

Multiplicatorii μ_{ik} se pot memora in triunghiul inferior al matricii A

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1k} & u_{1,k+1} & \dots & u_{1n} \\ \mu_{21} & u_{22} & \dots & u_{2k} & u_{2,k+1} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & & & \dots & \\ \mu_{k1} & \mu_{k2} & \dots & u_{kk} & u_{k,k+1} & \dots & u_{kn} \\ \mu_{k+1,1} & \mu_{k+1,2} & \dots & \mu_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ & & \dots & & & \dots & \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nk} & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

După pasul k

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ \mu_{21} & u_{22} & \dots & u_{2k} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & & \dots & \\ \mu_{k1} & \mu_{k2} & \dots & u_{kk} & \dots & u_{kn} \\ & & \dots & & \dots & \\ & & \dots & & \dots & \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nk} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

În final

Pseudocodul algoritmului EG:

Algoritm $G(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n - 1$
    1. **Pentru** $i = k + 1 : n$
        1. $a_{ik} \leftarrow \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    2. **Pentru** $j = k + 1 : n$
        1. **Pentru** $i = k + 1 : n$
            1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \mu_{ik} a_{kj}$

- În final: $Ux = Mb$ se rezolvă cu UTRIS

Pseudocodul algoritmului EG:

Algoritm $G(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n-1$
    1. **Pentru** $i = k+1 : n$
        1. $a_{ik} \leftarrow \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    2. **Pentru** $j = k+1 : n$
        1. **Pentru** $i = k+1 : n$
            1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \mu_{ik} a_{kj}$

- În final: $Ux = Mb$ se rezolvă cu UTRIS
- Complexitate totală: $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+2(n-k)^2) \approx \frac{2n^3}{3} = O(n^3)$

Pseudocodul algoritmului EG:

Algoritm $G(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n-1$
    1. **Pentru** $i = k+1 : n$
        1. $a_{ik} \leftarrow \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    2. **Pentru** $j = k+1 : n$
        1. **Pentru** $i = k+1 : n$
            1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \mu_{ik} a_{kj}$

- În final: $Ux = Mb$ se rezolvă cu UTRIS
- Complexitate totală: $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+2(n-k)^2) \approx \frac{2n^3}{3} = O(n^3)$
- Probleme: Ce se întâmplă dacă o submatrice lider principală este singulară?

Pseudocodul algoritmului EG:

Algoritm $G(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n - 1$
   1. **Pentru** $i = k + 1 : n$
      1. $a_{ik} \leftarrow \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
   2. **Pentru** $j = k + 1 : n$
      1. **Pentru** $i = k + 1 : n$
         1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \mu_{ik} a_{kj}$

- În final: $Ux = Mb$ se rezolvă cu UTRIS
- Complexitate totală: $\sum_{k=1}^{n-1} (n - k + 2(n - k)^2) \approx \frac{2n^3}{3} = O(n^3)$
- Probleme: Ce se întâmplă dacă o submatrice lider principală este singulară?
- Răspuns: La pasul k pivotul $a_{kk}^{(k)}$ este nul; cum se pot calcula, în situaţia aceasta, multiplicatorii μ_{ik} ?

Pivotare parţială

Modificăm algoritmul *G* prin interschimbarea de linii (şi/sau coloane) pentru a aduce în poziţia pivotului un element nenul.

$$
A_k = \begin{bmatrix}
u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\
0 & \ddots & & \dots & \\
 & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\
 & 0 & & \dots & \\
 & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\
 & 0 & & \dots & \\
 & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)}
\end{bmatrix}
\qquad
P_{k i_k} A_k = \begin{bmatrix}
u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\
0 & \ddots & & \dots & \\
 & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\
 & 0 & & \dots & \\
 & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\
 & 0 & & \dots & \\
 & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)}
\end{bmatrix}
$$

Modificare Pas k:

1. Se determină cel mai mic i_k : $|a_{i_k k}| = \max_{i=k:n} |a_{ik}|$

Modificăm algoritmul G prin interschimbarea de linii (şi/sau coloane) pentru a aduce în poziţia pivotului un element nenul.

$$A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad P_{k i_k} A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Modificare Pas k:

1. Se determină cel mai mic i_k : $|a_{i_k k}| = \max_{i=k:n} |a_{ik}|$
2. Se interschimbă liniile i_k şi k: $A \leftarrow P_{i_k k} A$

Modificăm algoritmul G prin interschimbarea de linii (şi/sau coloane) pentru a aduce în poziţia pivotului un element nenul.

$$A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad P_{ki_k} A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Modificare Pas k:

1. Se determină cel mai mic $i_k : |a_{i_k k}| = \max\limits_{i=k:n} |a_{ik}|$
2. Se interschimbă liniile i_k şi k: $A \leftarrow P_{i_k k} A$
3. Se calculează M_k pentru $(M_k A)_{ik} = 0, i = k+1 : n$

Pivotare parţială

Modificăm algoritmul G prin interschimbarea de linii (şi/sau coloane) pentru a aduce în poziţia pivotului un element nenul.

$$A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad P_{ki_k} A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Modificare Pas k:

1. Se determină cel mai mic $i_k : |a_{i_k k}| = \max_{i=k:n} |a_{ik}|$
2. Se interschimbă liniile i_k şi k: $A \leftarrow P_{i_k k} A$
3. Se calculează M_k pentru $(M_k A)_{ik} = 0, i = k + 1 : n$
4. Se aplică transformarea $A \leftarrow M_k A$

Modificăm algoritmul G prin interschimbarea de linii (şi/sau coloane) pentru a aduce în poziţia pivotului un element nenul.

$$A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad P_{ki_k} A_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \dots & \\ & & a_{i_k k}^{(k)} & \dots & a_{i_k n}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \dots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Modificare Pas k:

1. Se determină cel mai mic $i_k : |a_{i_k k}| = \max_{i=k:n} |a_{ik}|$
2. Se interschimbă liniile i_k şi k: $A \leftarrow P_{i_k k} A$
3. Se calculează M_k pentru $(M_k A)_{ik} = 0, i = k+1 : n$
4. Se aplică transformarea $A \leftarrow M_k A$

Pe scurt: $A_{k+1} = M_k P_k A_k$

În final: $U := A_n = M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \cdots M_1 P_1 A_k$

Algoritm $GPP(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n - 1$
    1. Se determină cel mai mic $i_k : |a_{i_k k}| = \max_{i=k:n} |a_{ik}|$
    2. $p(k) = i_k$
    3. **Pentru** $j = k : n$
        1. $a_{kj} \leftrightarrow a_{i_k j}$
    4. **Pentru** $i = k + 1 : n$
        1. $a_{ik} \leftarrow \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    5. **Pentru** $j = k + 1 : n$
        1. **Pentru** $i = k + 1 : n$
            1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \mu_{ik} a_{kj}$

- În final: $Ux = Mb$ se rezolvă cu UTRIS

Pivotare parţială

Algoritm $GPP(A)$

1. **Pentru** $k = 1 : n-1$
    1. Se determină cel mai mic $i_k : |a_{i_k k}| = \max\limits_{i=k:n} |a_{ik}|$
    2. $p(k) = i_k$
    3. **Pentru** $j = k : n$
        1. $a_{kj} \leftrightarrow a_{i_k j}$
    4. **Pentru** $i = k+1 : n$
        1. $a_{ik} \leftarrow \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    5. **Pentru** $j = k+1 : n$
        1. **Pentru** $i = k+1 : n$
            1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \mu_{ik} a_{kj}$

- În final: $Ux = Mb$ se rezolvă cu UTRIS
- Complexitate suplimentară faţă de G: $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1) \approx \frac{n^2}{2} = O(n^2)$