Calcul Numeric	Noiembrie, 2021

Seminar 2

Cristian Rusu

1 Scopul seminarului

În acest seminar vom rezolva probleme cu valori și vectori proprii:

- exemple de calcul pentru cazurile 2×2 și 3×3;
- rezolvarea sistemelor Markov;
- rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale și recurențe.

2 Exerciții

1. Calculați valorile și vectorii proprii pentru următoarele matrice:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Vi se dă o matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculați valorile și vectorii proprii pentru: $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^n$ pentru $n > 1$ natural, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$, și $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}_2$. Verificați că determinantul este produsul valorilor proprii și urma este suma valorilor proprii.

3. Aveți o matrice 2×2 reală $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Găsiți $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$.

4. Se dau $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ doi vectori orthogonali ($\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} = 0$). Calculați $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ și valorile lor proprii. Calculați $\mathbf{A}^2$ și valorile lor proprii.

5. Se dă matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 1-c \\ 0.6 & c \end{bmatrix}$. Calculați valorile/vectori proprii în funcție de c. Găsiți c pentru care matricea $\mathbf{A}$ are un singur vector propriu. Pentru $c = 0.2$ calculați $\mathbf{A}^n$ și $\mathbf{A}^\infty$.

6. Există o boală care se transmite între două populații A și B. Probabilitatea de transmisie este m de la A la B și f de la B la A. Calculați R_0, valoarea proprie cea mai mare a matricei de tranziție.

7. Avem o particulă care se poate afla în starea A sau B. Dacă este în starea A, particula rămâne în starea A cu probabilitate de 60% și trece în starea B cu probabilitatea de 40%. Dacă este în starea B, particula rămâne în starea B cu probabilitate de 80% și trece în starea A cu probabilitatea de 20%. Dacă particula începe în starea A unde se stabilizează?

8. Rezolvați sistemul de ecuații diferențiale folosind valori/vectori proprii:
$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y,\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y,\ \text{pornind de la } x = 13 \text{ și } y = 22 \text{ când } t = 0. \tag{1}$$

9. Rezolvați sistemul de recurențe:
$$x_{n+1} = 2x_n - y_n - 1,\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n + 2,\ \text{dacă } x_0 = 1 \text{ și } y_0 = -1. \tag{2}$$

3 Algoritmul QR

În această secțiune vom face o descriere detaliată a algoritmului QR prezentat la curs.

Primul pas pentru a înțelege algoritmul QR este un algoritm mai simplu, Metoda Puterii (Power Method):

1. inițializăm $\mathbf{X}_0$ de dimensiune $n \times p$ aleator (de obicei i.i.d. din distribuția Gaussiană)
2. pentru $k = 1, 2, \ldots$
   (a) $\mathbf{X}_k \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1}$
   (b) normalizăm coloanele matricei $\mathbf{X}_k$ la 1

În acest algoritm, matricea $\mathbf{X}_k$ converge la un subspațiu în care sunt primii vectori proprii (cei asociați valorilor proprii cele mai mari).

O îmbunătățire adusă algoritmului MP este Metoda Puterii Stabilă (Stable Power Method):

1. inițializăm $\mathbf{Q}_0$ de dimensiune $n \times p$ aleator (de obicei i.i.d. din distribuția Gaussiană)
2. pentru $k = 1, 2, \ldots$
   (a) $\mathbf{X}_k \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{Q}_{k-1}$
   (b) $\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k = \mathrm{qr}(\mathbf{X}_k)$ (factorizarea QR, a.k.a. procedeul Gram-Schmidt stabil numeric)

Pentru a ușura expunerea algoritmului QR vom face câțiva pași din MPS:

1. pasul de inițializare (inițializăm cu matricea unitate):
$$\underline{\mathbf{Q}_0} = \mathbf{I} \tag{3}$$
2. pasul 1:
$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_0} = \mathbf{A} \tag{4}$$
$$\underline{\mathbf{Q}_1}\underline{\mathbf{R}_1} = \mathbf{X}_1 = \mathbf{A} \tag{5}$$
3. pasul 2:
$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_1} \tag{6}$$
$$\underline{\mathbf{Q}_2}\underline{\mathbf{R}_2} = \mathbf{X}_2 \tag{7}$$
4. pasul 3 ...

În toate relațiile de mai sus, matricele $\mathbf{Q}_k$ sunt ortogonale:
$$\underline{\mathbf{Q}_k^T}\underline{\mathbf{Q}_k} = \mathbf{I} \tag{8}$$

Acum suntem pregătiți pentru a descrie algoritmul QR. Vom defini două matrice:
$$\mathbf{A}_k = \underline{\mathbf{Q}_k}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_k} \tag{9}$$
$$\mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k = \mathbf{A}_{k-1} \tag{10}$$

Acum vor revizita pașii algoritmului MPS:

1. pasul de inițializare:
$$\mathbf{Q}_0 = \underline{\mathbf{Q}_0} = \mathbf{I} \tag{11}$$

2. pasul 1:
$$\mathbf{X}_1 \overset{(4)}{=} \mathbf{A}_1 = \underline{\mathbf{Q}_1^T}\mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_1} \overset{(5)}{=} \underline{\mathbf{Q}_1^T}\underline{\mathbf{Q}_1}\underline{\mathbf{R}_1}\underline{\mathbf{Q}_1} \overset{(8)}{=} \underline{\mathbf{R}_1}\underline{\mathbf{Q}_1} \tag{12}$$
Apoi din (10) avem:
$$\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}_0 \overset{(9)}{=} \underline{\mathbf{Q}_0^T}\mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_0} \overset{(11)}{=} \mathbf{A} \tag{13}$$
Conform definiților noastre avem:
$$\mathbf{Q}_1 = \underline{\mathbf{Q}_1} \tag{14}$$
$$\mathbf{R}_1 = \underline{\mathbf{R}_1} \tag{15}$$
Și avem în final:
$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{R}\mathbf{Q} \tag{16}$$

3. pasul 2:
$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_1} \overset{(8)}{=} \underline{\mathbf{Q}_1^T}\underline{\mathbf{Q}_1}\mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_1} \overset{(9)}{=} \underline{\mathbf{Q}_1}\mathbf{A}_1 \overset{(10)}{=} \underline{\mathbf{Q}_1}\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2 \tag{17}$$
Conform definiților noastre avem:
$$\underline{\mathbf{Q}_2} = \underline{\mathbf{Q}_1}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \tag{18}$$
$$\underline{\mathbf{R}_2} = \mathbf{R}_2 \tag{19}$$
În final avem:
$$\mathbf{A}_2 \overset{(10)}{=} \underline{\mathbf{Q}_2^T}\mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_2} \overset{(18)}{=} \mathbf{Q}_2^T\underline{\mathbf{Q}_1^T}\mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}_1}\mathbf{Q}_2 \overset{(9)}{=} \mathbf{Q}_2^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_2 \overset{(10)}{=} \mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \overset{(8)}{=} \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \tag{20}$$

4. pasul 3 ...

În concluzie avem:
$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{R}_k\mathbf{Q}_k \tag{21}$$
iar $\mathbf{R}_k$ și $\mathbf{Q}_k$ provin din:
$$\mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k = \mathbf{A}_{k-1} \tag{22}$$
Acum putem scrie algoritmul QR complet:

1. inițializăm $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$
2. pentru $k = 1, 2, \ldots$
   (a) $\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k = \mathrm{qr}(\mathbf{A}_{k-1})$ (factorizarea QR, a.k.a. procedeul Gram-Schmidt stabil numeric)
   (b) $\mathbf{A}_k \leftarrow \mathbf{R}_k\mathbf{Q}_k$

În matricea $\mathbf{A}_\infty$ vom avea o matrice superior triunghiulară în general sau diagonală (dacă matricea $\mathbf{A}$ este simetrică).
Fin.