

## Seminar 5

Paul Irofti

## 1 Scopul seminarului

În acest seminar vom rezolva probleme cu reprezentări rare:

- exemple de calcul;
- rezolvarea unor probleme;
- demonstrațiile teoremelor de la curs.

## 2 Exerciții

1. O normă este o funcție  $f$  care satisface următoarele proprietăți:

- pozitiv definită:  $f(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;  $f(\mathbf{0}) = 0$
- omogenitate:  $f(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha|f(\mathbf{x})$
- inegalitatea triunghiului:  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

Arătați că  $\ell_0$  nu satisface proprietățile unei norme. Dați contra-exemple pentru proprietățile care nu sunt satisfăcute.

2. O proprietate firească a algoritmilor de reprezentare rară este liniaritatea: fie  $\mathbf{x}$  reprezentarea lui  $\mathbf{y}$  (adică  $\mathbf{y} \approx \mathbf{D}\mathbf{x}$ , cu dicționarul dat  $\mathbf{D}$ ), atunci reprezentarea lui  $\alpha \mathbf{y}$  este  $\alpha \mathbf{x}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Demonstrați că OMP are într-adevăr această proprietate.
3. Ce se întâmplă cu obiectivul problemei DL, respectiv cu soluția (optimă) rezultată când  $n$  sau  $s$  cresc? Ce vă așteptați să se întâmple cu RMSE când, totul fiind fixat, numărul  $N$  de semnale crește? (Presupunem că toate semnalele provin de la aceeași sursă.) În mod similar, ce vă așteptați să se întâmple cu RMSE atunci când dimensiunea  $m$  a semnalelor crește? (Presupunem că semnalele de lungime  $m$  sunt obținute prin aplicarea unei fereaste asupra aceluiași semnal lung.)
4. Fie problema ponderată DL, în care unele semnale sunt mai importante decât altele și, prin urmare, o pondere este asociată cu eroarea fiecărui semnal. Deci, în acest caz, eroarea de reprezentare poate fi scrisă ca  $\|(\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{X})\mathbf{W}\|_F$ , unde  $\mathbf{W}$  este o matrice diagonală dată cu elemente pozitive pe diagonală. Avem nevoie algoritmi speciali pentru această problemă sau poate fi rezolvată cu aceiași algoritmi DL?
5. Ce se întâmplă dacă un semnal de antrenament apare de mai multe ori în matricea  $\mathbf{Y}$ ? Este acest lucru echivalent cu asocierea unei ponderi mai mari acestui semnal? Dacă da, care este valoarea ponderii?
6. Am discutat că testele pe imagini se pot face pe patch-uri care se suprapun sau sunt disjuncte. În ce caz vă așteptați ca RMSE la sfârșitul procesului de DL să fie mai mic?